OVER DE BROWNSE BEWEGING

Korte historiek

Als men pollen (stuifmeel van bloemen) in een vloeistof, bv. water, strooit dan splitsen die op in een groot aantal kleine deeltjes. Als men die dan onder een microscoop observeert dan blijken die een wilde, ononderbroken en onregelmatige kriskrasbeweging uit te voeren. Robert Brown (1773-1858), een Schotse botanicus, stelde dit vast in 1827[1,2]. Vermits het fenomeen zich herhaalde voor alle mogelijke organische stoffen lag een animistische verklaring voor de hand: Brown geloofde eerst dat hij in deze deeltjes de 'primitieve molecule' van de levende materie gevonden had. Nadien stelde hij vast dat kleine partikeltjes van om 't even welke anorganische stof hetzelfde verschijnsel vertoonden. Daaruit concludeerde hij dat alle materie opgebouwd is uit 'primitieve moleculen'.

Noteer dat de befaamde Nederlandse microscopist Antoon van Leeuwenhoek (1632-1723) deze beweging al meer dan een eeuw eerder had beschreven. Men blijft de benaming Brownse beweging gebruiken; Brown heeft immers een intensieve onderzoeksgolf op gang gebracht. Men experimenteerde o.a. met kleine verfdeeltjes en zelfs materiaal uit het graf van een farao en vond steeds dezelfde chaotische beweging! Deze is heftiger als de deeltjes kleiner zijn en zwakker als ze groter zijn om bij deeltjes groter dan 0,1 mm doormeter nagenoeg onmerkbaar te worden. Vele uiteenlopende verklaringen (invloed van invallend licht, onregelmatige verwarming, elektrische krachten, …) werden geopperd. In 1877 suggereerde Delsaux voor het eerst dat de Brownse beweging haar oorsprong vond in de botsingen van de moleculen van het oplosmiddel op de opgeloste deeltjes. M. Gouy[3] deed nauwkeurige metingen ; zo vond hij dat de beweging heviger wordt als de viscositeit van het oplosmiddel kleiner is, wat overigens door de theorie van Einstein bevestigd is. Gouy schatte de snelheid van de deeltjes op een honderd miljoenste van de snelheid van de moleculen, (wat dus in de buurt van 6 μm/s zou zijn).

Einstein[4,5] gaf in 1905 de verklaring, kwalitatief en kwantitatief. De Brownse beweging maakt de thermische beweging van de moleculen op indirecte wijze zichtbaar. Dit gaf een enorme impuls aan de statistische fysica. Zelfs heden ten dage wordt er gevorderd onderzoek verricht op de Brownse beweging, zowel experimenteel als zeer mathematisch.

Door het verklaren van de Brownse beweging en door de berekening van het getal van Avogadro[6,7] leverde Einstein de beslissende bijdragen voor de atomaire/moleculaire opvatting van de materie. Dankzij het werk van o.a. James Clerck Maxwell (1831-1879), pionier van het elektromagnetisme en Ludwig Boltzmann (1844-1906), beiden pioniers van de kinetische theorie, was de corpusculaire zienswijze in 1905 al aan de winnende hand t.o.v. de continuümtheorie, volgens dewelke men een (homogene) stof steeds fijner en fijner zou kunnen verdelen tot in het oneindige zonder ooit de kenmerkende eigenschappen ervan te verliezen.

Maar er waren nog wel notoire tegenstanders van de atomaire theorie, zoals Ostwald en Mach. Wilhelm Ostwald (1853-1932) kreeg de Nobelprijs voor chemie in 1909 (onmiddellijk erna nomineerde hij Einstein voor de Nobelprijs i.v.m. de relativiteitstheorie!). Na de publicaties van Einstein over de Brownse beweging en het getal van Avogadro was Ostwald helemaal overtuigd van de moleculaire structuur van de materie. Ernst Mach (1838-1916), een Oostenrijks fysicus-filosoof (die van het Machgetal voor geluidsgolven) had Einstein beïnvloed door zijn kritiek op de absolute ruimte en tijd van Newton die Mach metafysische, niet meetbare begrippen vond. Deze kritiek had Einstein ernstig genomen en de relativiteitstheorie opgesteld. Maar Mach was ook hardnekkig gekant tegen de moleculaire theorie: moleculen kon men niet waarnemen en dus waren ze metafysische concepties. Bovendien waren ze in zijn optie overbodig: de thermodynamica gaf, volgens Mach, een bevredigende beschrijving van de fenomenen op haar gebied. Hier volgde Einstein Mach niet en vnl. door zijn werk i.v.m. de Brownse beweging en het getal van Avogadro werd die kritiek (die op zichzelf gezond was) ontzenuwd: nu kon men de moleculen indirect waarnemen, o.a. door hun invloed op microscopisch waarneembare objecten zoals pollen. Nu kon men hun aantal berekenen, hun massa, enz. Nu kon men ermee rekenen, diepere verbanden aanwijzen, verklaringen geven, nieuwe voorspellingen maken. Bv. de druk in een ideaal gas is $p = nkT$, met n het aantal deeltjes per m^3, T de absolute temperatuur en k de constante van Boltzmann ($1{,}38\ 10^{-23}$ J/K). Deze relatie verbindt macroscopische grootheden (p,T) met microscopische (n). De ideale gaswet kan weliswaar ook op equivalente wijze geschreven worden met alleen macroscopische grootheden: $pV = RT$, met R de gasconstante (= 8,3 J/K per mol) en V het volume van een mol. Maar de veralgemening ervan, de wet van Van der Waals, wordt veel beter begrepen in het licht van de microscopische grootheden. Bovenal : bepaalde fenomenen zoals de Brownse beweging (en later de kritische opalescentie, enz.) werden door de corpusculaire theorie opgehelderd – iets wat de thermodynamica totaal niet kon verklaren.

Democritos (circa 470 tot 380 v.C.) had ook reeds een atomistische structuur voorgesteld: alle materie bestond uit bijna oneindig kleine deeltjes, zo klein dat niets kleiner denkbaar was. Ze waren dus ondeelbaar, zoals het woord 'atomos' zelf zegt in het Grieks. Ze waren volgens Democritos[8] eeuwig, onveranderlijk en onverwoestbaar. Zelfs de menselijke geest en de goden, indien die bestonden, waren er uit opgebouwd! Ze verschilden in structuur wat de verschillen in materialen verklaarde: een wateratoom was glad en rond, zodat water gemakkelijk kon vloeien; de atomen van vuur waren doornig, wat volgens Democritos de pijn verklaarde die vuur veroorzaakt. Socrates (circa 470-399 v.C.) en zijn leerlingen waren gekant tegen deze visie en doordat hun invloed veel groter was, werd deze atoomleer niet erg verspreid. Men kan de vooruitstrevende gedachte van Democritos appreciëren, maar hij leverde geen bewijzen, kon niets kwantitatief verifiëren en de kritiek van

Mach geldt voor het volle pond! Dat wordt benadrukt door de verscheidene foute eigenschappen die reeds in de beperkte opsomming hierboven optreden.

Het is merkwaardig dat Einstein, die eerst in verscheidene gebieden enorm bijdroeg tot de corpusculaire opvatting, op rijpere leeftijd evolueerde tot een overtuigd voorstander van een ruimte-tijd-continuüm. Er is hierbij geen contradictie of terugkrabbelen: het verschil zit in het niveau waarop gedacht wordt. Zie appendix.

Dronkemanswandeling (‘Random Walk’)

De kanstheorie leert dat als men n tellen zou moeten krijgen, bv. in een telapparaat, de fluctuaties daarop grotendeels liggen tussen $n-\sqrt{n}$ en $n+\sqrt{n}$. De kans in dit interval is, afgerond, 2 op 3. In het interval en $n-2\sqrt{n}$ $n+2\sqrt{n}$ is de kans uiteraard nog groter (iets meer dan 90%).

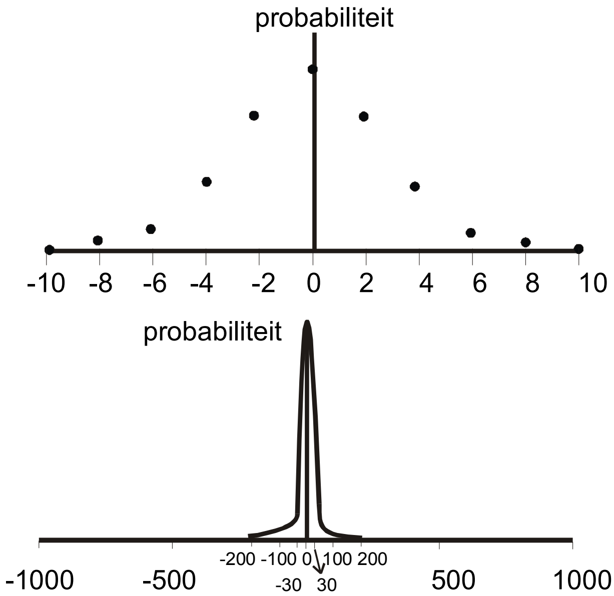
Eerste voorbeeld

Als gemiddeld over een gans jaar 400 klanten een supermarkt op zaterdag bezoeken dan zal het aantal op een bepaalde zaterdag tussen de 380 en de 420 liggen met 2/3 kans. D.w.z. de kans dat er minder klanten zijn dan 380, samen met de kans dat er meer zijn dan 420, is maar 1 op 3, dus de helft van de kans tussen 380 en 420. Uiteraard is hierbij geen rekening gehouden met één of andere systematische oorzaak: als er een staking is of de supermarkt heeft een interessant produkt in aanbieding dan kunnen de fluctuaties vanzelfsprekend veel groter zijn.

Tweede voorbeeld

Analoog voor iemand die een muntstuk opgooit en 1 stap (of 1 m) naar rechts gaat als het kop is en 1 stap naar links als het munt is. Na 10 maal opgooien zullen we de persoon vinden bv. in het interval –3 tot +3 van zijn vertrekstand. De kans op +10 of –10 is miniem: 2^{-10} of minder dan 1 op 1000 voor elk. Gooien we 1000 maal op, dan verwachten we de persoon NIET in de buurt van –300 of van + 300 (dus zowat honderd maal de vorige waarden –3 en +3): de kans hiervoor is pietluttig klein. Hij zal ergens tussen $-\sqrt{1000}$ en $+\sqrt{1000}$ terecht komen, dus ruwweg tussen –32 en +32, met een kans van ongeveer 2 op 3.

Dus, alhoewel de spreiding groter wordt bij een groter aantal stappen of tellen, neemt ze veel trager toe dan het aantal tellen zelf. Zie figuur 1.

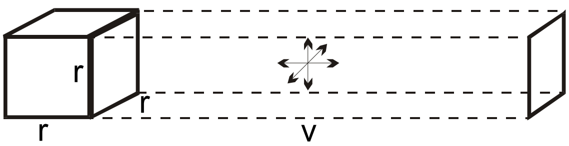


Figuur 1. Bij grotere n (dus meer tellen, stappen, bezoekers, …) neemt de spreiding wel toe, maar slechts als √n. Verhoudingsgewijs, in vergelijking met het aantal n, neemt ze dus af als $\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Vandaar de smallere piek in de tweede schets, waar de schaal gereduceerd is zodat de maximale uitwijking even groot is als erboven. In de onderste schets is een continue lijn getekend, i.p.v. individuele punten zoals in de bovenste schets.

Elementair inzicht in de Brownse beweging

De redenering van Einstein was gesofistikeerder dan wat hier volgt, maar de essentie zal duidelijk zijn.

Beschouw een lichaampje, bv. afkomstig van een pollen, dat in een vloeistof (bv. water) ondergedompeld is. Om de gedachten te vestigen beschouwen we een kubusje met ribbe r (bv. 0,01 mm). Een zijvlak heeft dan een oppervlakte r^2. We beschouwen de (lange) cilinder met hoogte v loodrecht op dit zijvlakje, waarbij v de gemiddelde snelheid is van de moleculen (dit is voor water iets als 600 m/s). Deze cilinder heeft als volume r^2v. Zie figuur 2. In een tijd t zou het volume van de cilinder r^2vt zijn.



Figuur 2: Een kubusje met ribbe r. Op het zijvlak wordt een balk beschouwd (in gedachten) met hoogte v. Het sterretje illustreert de bewegingen van de moleculen volgens 6 oriëntaties.

In één Mol, dus in M gram, waarbij M de moleculaire massa is (voor water is dat 18 gram) zitten N_A moleculen, waarin $N_A = 6,02\ldots 10^{23}$ het getal van Avogadro is. Op 6 moleculen beweegt er één naar het beschouwde zijvlakje van het kubusje. Sommige zitten in de cilinder, maar vliegen schuin en missen het zijvlak, maar dat wordt gecompenseerd door andere moleculen die niet in de cilinder zitten en ook schuin vliegen en wel het zijvlak bereiken. Vele moleculen botsen met andere moleculen: de ene bereiken dan het zijvlak niet, maar de andere bereiken dan het zijvlak wel (soms meerdere malen) en ook dit compenseert gemiddeld. Dus in een tijd t seconden botsen er met het zijvlak

$$\frac{r^2vtN_A}{6M}$$

(Meer precieze beschouwingen, bv. door de snelheidsverdeling van de moleculen in acht te nemen, leveren nog een factor van de orde 1, maar dat is niet belangrijk voor de essentie van het verhaal.)

Dit geldt voor alle zijvlakken van het kubusje. Netto zou de corresponderende kracht dus nul zijn, want de botsingen aan de ene kant neutraliseren gemiddeld die aan de andere kant. Maar die neutralisatie is haast nooit perfect. De fluctuatie op het aantal botsingen is gegeven door de vierkantswortel van het aantal botsingen (met een kansverdeling zoals hoger uitgelegd). Dus zullen er de ene seconde bv. op het rechterzijvlak iets als $(r^2vtN_A/6M)^{1/2}$ meer botsen dan op de linkerzijde, de volgende seconde kan het net omgekeerd zijn. Analoog voor onder- en bovenkant en voor voor- en achterkant. Dit geeft aanleiding tot de kriskras beweging, de Brownse beweging.

Een kubusje met grotere ribbe krijgt dus meer botsingen (evenredig met r^2) en ook een grotere fluctuatie in het aantal botsingen, maar dit laatste is slechts evenredig met r. Waarom zijn het dan juist de kleinere deeltjes die de Brownse beweging het sterkst vertonen? Volgens de Newtoniaanse bewegingsvergelijking is massa maal versnelling = kracht. In dit geval neemt de kracht (evenredig met de fluctuatie op de botsingen) toe evenredig met r terwijl het volume en dus de massa evenredig met r^3 toenemen. De versnelling zal dus evenredig zijn met $1/r^2$. Zo ook de snelheid en de verplaatsing van het kubusje. Grotere deeltjes bewegen dus veel minder.

Kwantitatieve beschouwing

Bij een botsing en reflectie van een molecuul met massa m en snelheid v wordt een impuls 2mv doorgegeven aan het kubusje. Dat kubusje heeft een massa ρr^3 waarbij ρ de massadichtheid van het materiaal voorstelt. Volgens het voorgaande en de bewegingswet van Newton is de versnelling a die het kubusje dan krijgt gegeven door

$$a = \alpha 2mv\sqrt{N_A vt / 6M}/\rho r^2$$

waarbij α fluctueert, maar van de orde van de eenheid is, dus de ene maal bv. 1/2, de andere maal –1/3, maar zelden de waarden 3 of –3 overschrijdt zoals we hoger gezien hebben.
Met een versnelling a correspondeert in één seconde een gemiddelde snelheid a/2 en een evengrote verplaatsing. Bovenstaande formule zou kunnen toelaten voor verscheidene vloeistoffen, lichaampjes en temperaturen (v hangt van T af) de fluctuerende verplaatsingen te vergelijken met de observaties. Het resultaat zal echter veel, veel te groot zijn. We hebben nl. geen rekening gehouden met het feit dat eens het kubusje een snelheid heeft, deze snelheid niet meer op dezelfde wijze toeneemt (er kan bv. afremming optreden als de impulsoverdracht tegengesteld is aan de snelheid). Mijn berekeningen worden dan ingewikkelder. Einstein heeft deze klip omzeild door ineens met bepaalde macroscopisch meetbare grootheden te werken, nl. de diffusieconstante D, die aangeeft hoe snel deeltjes diffunderen in een vloeistof onder invloed van een kracht, bv. een (dichtheids)gradiënt. Hij heeft een relatie voor D opgesteld (zie mijn artikel[7] over het getal van Avogadro) o.a. door gebruik te maken van de wet van Stokes die de snelheid u geeft van een sfeer (straal r) onder invloed van een kracht K in een medium met viscositeit η, nl. $u = K/6\pi\eta r$. Uiteindelijk vond hij de gemiddelde verplaatsing l na een tijd t::

$$\sqrt{\frac{RTt}{3\pi\eta r N_A}}$$

waarbij η de viscositeit is. Numeriek vond Einstein een gemiddelde verplaatsing van ongeveer 6 μm in één minuut voor een deeltje van 1 μm in water bij een temperatuur van 17°C (dus T =290 K).

Opmerkingen

- Wij hadden een cilinder met vt beschouwd. Vandaar dat $t^{1/2}$ optreedt in het resultaat. De gemiddelde verplaatsing wordt natuurlijk groter als men langer wacht, maar is door de fluctuaties slechts evenredig met $t^{1/2}$ en niet evenredig met t.
- De Brownse beweging is heviger bij hogere temperaturen en valt stil bij het absolute nulpunt. Dit is zeer begrijpelijk vermits de snelheid van de moleculen evenredig is met $T^{1/2}$. Ook dit laat zich goed verifiëren.
- Met kleinere viscositeit wordt l groter, zoals Gouy experimenteel gevonden had.

APPENDIX: Einsteins evolutie van revolutionair corpusculair denker tot overtuigd voorstander van een ruimte-tijd continuüm

Einstein was in zijn jonge jaren een fervente voorvechter van de corpusculaire opvatting. Dat is al duidelijk gebleken uit de twee bovenvermelde aspecten: de Brownse beweging en het getal van Avogadro. Sterker nog: voor het licht voerde hij ook de deeltjestheorie opnieuw in en gaf aldus een verklaring van het foto-elektrisch effect, van het Compton effect (door A. H. Compton (1892-1962) waargenomen in 1923), van fluorescentie, enz. Deze visie van licht als deeltjes gaat vnl. terug op Isaac Newton (1642/43-1727) die het licht als partikeltjes opvatte omwille van de rechtlijnige voortplanting. De Nederlander Christiaan Huygens (1629-1695) daarentegen ontwikkelde een golftheorie; deze won steeds meer en meer veld ten gevolge van experimenten, o.a. de interferentieverschijnselen (cf. Thomas Young

(1773-1829)) die een onoverkomelijke struikelblok vormden voor de deeltjes opvatting. Ten gevolge van het enorme prestige van Newton hield de corpusculaire theorie langer stand dan plausibel, maar rond 1850 was ze definitief afgeschreven. Als dan in 1905 de 26-jarige Einstein nieuw leven blaast in de deeltjestheorie, dan is dat een donderslag bij klare hemel voor de gemeenschap van de fysici. Zelfs Max Planck (1858-1947), de 'paus van de fysica' in die tijd, die zelf de eerste stoot aan de kwantum mechanica gegeven heeft in 1900 en zeer veel respect had voor Einstein, dacht eind 1913 nog dat Einstein hier de bal volledig missloeg ('een menselijke vergissing in een overigens gezond brein'!). Nochtans ging de kwantummechanica een reuzenstap vooruit door de twee relaties van Einstein ($E = h\nu$ en $p = h\nu/c$, met E de energie, ν de frequentie en p het impuls van het foton, $h = 6{,}6260755(40)... 10^{-34}$ Js de constante van Planck en $c = 2{,}99792458\ 10^{8}$ m/s de lichtsnelheid). Verder gebruikte Einstein de kwantumniveau's (die Niels Bohr (1885-1962) eerst suggereerde in 1913) in 1916 o.a. om de stralingswet van Planck te bevestigen en om de basis van de laser te leggen. Uit dit alles blijkt wel dat Einstein tot omzeggens zijn veertigste een vurig voorstander was van de deeltjestheorie en van 'gekwantizeerde' energiepakketjes.

Op latere leeftijd (eigenlijk zelfs op middelbare leeftijd) evolueerde hij totaal naar een continue opvatting van de diepste structuur van de natuur. Deze ontwikkeling zal hoogstwaarschijnlijk gepaard zijn gegaan met zijn eigen gravitatietheorie. Deze is immers een veldentheorie, sterker nog: een theorie van ruimte-tijd-kromming. En ze heeft de karakteristieke eigenschap niet lineair te zijn; aldus kan een deeltje volgens Einstein opgevat worden als een quasi-singulariteit, die deel uitmaakt van het veld (of van de ruimtetijd) op een continue wijze, i.p.v. dat er een vreemd lichaam, of een echte singulariteit, in het veld zou zitten. De zgn. elementaire deeltjes moeten dus volgens Einstein opgevat worden als een (onder)deel van het veld, weliswaar een onderdeel dat enorm getormenteerd is door het niet-lineaire gedrag. Geheel in deze gedachtegang merkte Einstein op dat het elektron een vreemdeling is in de elektromagnetische theorie van Maxwell. Voor Einstein zou een meer complete elektromagnetische theorie ook het bestaan en de eigenschappen van het elektron moeten verklaren. Nog beter: de theorie van het eenheidsveld (unified field theory), die gravitatie, elektromagnetisme, zwakke en sterke wisselwerking zou verenigen, zou liefst het bestaan en de eigenschappen van alle deeltjes moeten verklaren. Noteer overigens dat er geen onveranderlijke deeltjes kunnen bestaan omdat geen wisselwerking zich sneller kan voortplanten dan de lichtsnelheid c, volgens de relativiteitstheorie. (Bv. als een stok strikt star zou zijn dan zou een tik tegen het ene uiteinde onmiddellijk doorgegeven worden naar het andere uiteinde – en onmiddellijk kan niet vermits c de grootste snelheid is.) In dit aspect wijkt de moderne visie sterk af van de atomaire opvatting van Democritos, die dacht dat de elementaire bouwstenen onveranderlijk waren.
Overigens is de kwantummechanica, sedert de twintigerjaren, ook niet meer zó 'discreet', werkt ze ook niet meer met zó strikte energieniveaus, als in de pionierstijd, maar met probabiliteiten die continu verdeeld worden; de Schrödingervergelijking is een partiële differentiaalvergelijking.
Het getuigt van de grootheid van Einstein om zijn denken te kunnen heroriënteren: van uitgesproken deeltjesfysica naar een niet lineaire continuümtheorie. Maar, zoals eerder gezegd, er is hier geen paradox: het ene denken gebeurt op atomaire schaal, het andere denken is op een nog diepgaander niveau.

Einstein was op latere leeftijd ook niet tevreden met de kwantummechanica:
' … I must take a stand with reference to the most successful physical theory of our period, viz. the statistical quantum theory which, about twenty-five years ago, took on a consistent logical form (Schrödinger, Heisenberg, Dirac, Born). This is the only theory at present which permits a unitary grasp of experiences concerning the quantum character of micro-mechanical events. …[9].

Hij achtte ze op fundamenteel niveau niet bevredigend. Dit standpunt is enigszins verweven met zijn evolutie van 'corpusculair' denken tot zijn 'continue' visie. En ook dit getuigt van het onverdroten zoeken, het nooit tevreden zijn van Einstein, die maar niet op zijn lauweren kon rusten en bereid was om zijn eigen triomfen telkens weer in vraag te stellen.

REFERENTIES

1) R. Brown, Phil. Mag. (4), 161 (1828).
2) R. Brown, Ann. d. Phys. u. Chem., **14**, 294 (1828).
3) M. Gouy, Journ. de Phys. (2), **7**, 561 (1888).
4) A. Einstein, Ann. d. Phys., **17**, 549 (1905).
5) A. Einstein, Ann. d. Phys., **19**, 371 (1906).
6) A. Einstein, 'Investigations on the theory of Brownian Movement', edited with notes by R. Fürth, translated by A. D. Cowper, Dover Publ. (1956).
7) D. K. Callebaut: zie bijgaand artikel 'Over het getal van Avogadro'.
8) I. Asimov, 'Asimov's Biographical Encyclopedia of Science and Technology', Pan Reference Books (1975).
9) A. Einstein, 'Autobiographical Notes' , in 'Albert Einstein: Philosopher-Scientist', by P. A. Schilpp (ed.), Tudor Publishing Company, New York (1957).

Dirk CALLEBAUT
Dept. Natuurkunde
UA